Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 7

Esercizio 1 Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbb{R}$ che soddisfa

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x,\, y \in \mathbb{R}$$

Si provi che

- $f(0) = 0$
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$ per ogni x, y
- se f è continua in 0 allora è continua in $\mathbb{R}$

Esercizio 2 Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbb{R}$ che soddisfa

$$|f(x)| \leq |x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si provi che $f(x)$ è continua in 0.

Esercizio 3 Si determini l'insieme di definizione e i punti di discontinuità della funzione

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+x^n}{x^n}.$$

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = x\,(x - e^{-x}).$$

- si dimostri che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0, 2]$
- si dimostri che l'equazione di sopra ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{R}$.

Esercizio 5 Sia $f(x)$ una funzione polinomiale di grado pari

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad \text{con } n \text{ pari.}$$

Si determini il numero minimo di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ sapendo che il coefficiente del termine di grado massimo a_n e il termine noto a_0 hanno segno opposto.

Esercizio 6 Sia $f\,:\,(a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

i. Dare esempi di funzioni f che soddisfano le ipotesi, ma non ammettono minimo.
ii. Dimostrare che, se esiste $x_0 > a$ tale che $f(x_0) < \ell$, allora la funzione f ammette minimo.

Esercizio 7 Sia $f\,:\,I \to I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Un punto che verifica questa equazione si chiama "*punto fisso*" per f. Fare un esempio in cui x non è unico.

[*Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione* $f(x) - x$.]

Esercizio 8 Sia $f\,:\,I \to I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che se $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1,\, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, allora **esiste un unico** $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Esercizio 9 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che

$$f(x) = 3 - 2x^2, \qquad \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Calcolare $f(\frac{\pi}{4})$ ed $f(\frac{\pi}{8})$.

Esercizio 10 Dire se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ nei seguenti casi

1. $a = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\arctan(6x)}{1 + 3x^2}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $a = 0$, $f(x) = \dfrac{\log(1 + 3x^2)}{\sin(x^2)}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $a = 3$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - (x - 3)}{e^{-\frac{1}{x^2 - 9}}}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 11 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 5$, $f(1) = 10$.

1. Se f è monotona, allora $\mathrm{Im}(f) = [5, 10]$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $\mathrm{Im}(f) = [5, 10]$, allora f è monotona e continua. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se f è continua, allora $\max_{[0,1]} f(x) = 10$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Se f è continua, allora esiste $x \in (0, 1]$ tale che $f(x) - \sin^2(\cos x^3) = 7$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$